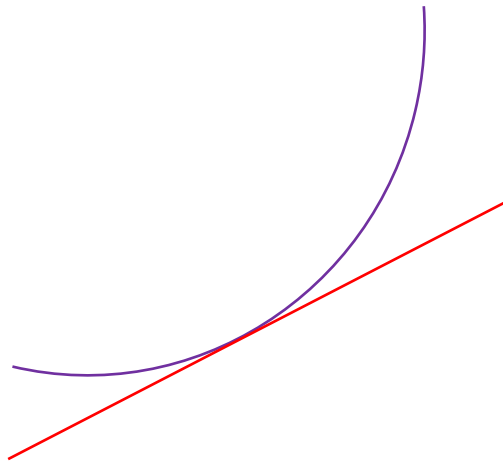


חשבון
דיפרנציאלי
ואינטגרלי
I



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 (חדו"א 1) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר <http://www.gool.co.il> הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לצפיה בשיעור חינם בעמוד הקורס: **חדו"א 1**

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן

6	פרק 1 - פונקציה ממשית
6	פתרונות
8	פרק 2 - גבול של פונקציה
12	פתרונות
13	פרק 3 - רציפות ומשפט ערך הביניים
13	רציפות
15	משפט ערך הביניים (של קושי)
15	פתרונות
16	פרק 4 - גזירות של פונקציה, הגדרת הנגזרת
18	פתרונות
19	פרק 5 - גזירה של פונקציה
20	פתרונות
22	פרק 10 - חקירת פונקציה - "שאלות מסביב"
24	פתרונות
25	פרק 16 - טור טיילור/מקלורן
27	נוסחת השארית של לגרנג'
28	פתרונות
30	פרק 17 - סדרות
33	פתרונות
34	פרק 18 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרל מיידי)
35	פרק 19 - האינטגרל הלא מסויים (הנגזרת כבר בפנים)
36	פרק 20 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרציה בחלקים)
37	פרק 21 - האינטגרל הלא מסויים (שיטת ההצבה)
38	פרק 22 - האינטגרל הלא מסויים (פונקציות רציונליות)
39	פרק 23 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות)
39	אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת זהויות בלבד)
40	אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)
41	אינטגרלים עם שורשים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)
42	פרק 24 - האינטגרל המסויים
45	פרק 25 - משוואות מסדר ראשון
45	הפרדת משתנים
47	משוואה הומוגנית
49	משוואה הומוגנית - שיטת ההצבה
51	משוואה מדויקת
53	גורם אינטגרציה
55	משוואה לינארית מסדר ראשון

- 57..... משוואת ברנולי
- 60..... משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה
- 62..... משפט הקיום והיחידות
- 63..... פרק 26 - פונקציות של מספר משתנים, גבולות ורציפות
- 65..... פתרונות
- 66..... פרק 27 - נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות
- 68..... פתרונות
- 69..... פרק 28 - כלל השרשרת לפונקציה של מספר משתנים
- 70..... פתרונות
- 71..... פרק 29 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט
- 72..... פתרונות
- 73..... פרק 30 - פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות, שימושים גיאומטריים
- 73..... פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות
- 73..... שימושים גיאומטריים (מישור משיק וישר נורמלי למשטח)
- 74..... פתרונות
- 75..... פרק 31 - נוסחת טיילור של פונקציה בשני משתנים, הדיפרנציאל השלם
- 75..... נוסחת טיילור
- 75..... הדיפרנציאל השלם
- 76..... פתרונות
- 77..... פרק 32 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)
- 78..... פתרונות
- 79..... פרק 33 - קיצון של פונקציה של שניים/שלושה משתנים (רמה מתקדמת)
- 79..... שיטת מינימום הריבועים הפחותים
- 79..... שיטת הריבועים הפחותים
- 80..... פתרונות
- 81..... פרק 34 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')
- 81..... פונקציות של שני משתנים
- 82..... פתרונות
- 83..... פרק 35 - קיצון תחת אילוצים של פונקציה של שלושה משתנים (כופלי לגרנג')
- 83..... פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוץ
- 83..... פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוצים
- 84..... פתרונות
- 85..... פרק 36 - קיצון מוחלט של פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה
- 85..... פתרונות
- 86..... פרק 37 - החלפת משתנים באינטגרל משולש (יקוביאן)

86.....	פתרונות
87.....	פרק 38 - אינטגרלים קויים ושימושיהם (אורך ומסה של עקום, עבודה)
87.....	אינטגרל קוי מסוג I
88.....	אינטגרל קוי מסוג II
91.....	פתרונות
92.....	פרק 39 - אי תלות במסלול, שדות משמרים
94.....	פתרונות
95.....	פרק 40 - משפט גרין
96.....	פתרונות
97.....	פרק 41 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם
97.....	אינטגרל משטחי מסוג I
98.....	אינטגרל משטחי מסוג II
98.....	פתרונות
99.....	פרק 42 - משפט הדיברגנץ (גאוס)

פרק 1 - פונקציה ממשית

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

$$y = \frac{4x+1}{x^2+1} \quad (3) \quad y = \frac{1}{x^2-4} \quad (2) \quad y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \sqrt{x-4} \quad (6) \quad y = \frac{x^2}{x^2-x-2} \quad (5) \quad y = \frac{1}{x^3-x} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} \quad (9) \quad y = \sqrt[3]{x^2+x-1} \quad (8) \quad y = \sqrt{x^2+x-2} \quad (7)$$

$$y = e^{x^2+x+1} \quad (12) \quad y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11) \quad y = \ln(x^2+x-2) \quad (10)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15) \quad y = \tan(10x) \quad (14) \quad y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

$$y = \arccos(x+1) \quad (18) \quad y = \arcsin(x-4) \quad (17) \quad y = \arctan(x+4) \quad (16)$$

(2) נתונות הפונקציות הבאות : $h(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = x^2$, $f(x) = x-4$

חשב את הפונקציות המורכבות הבאות :

$$h(h(x)) \quad (6) \quad f(f(x)) \quad (5) \quad h(f(x)) \quad (4) \quad f(g(x)) \quad (3) \quad h(g(f(5))) \quad (2) \quad f(g(1)) \quad (1)$$

(3) בתרגילים הבאים הוכח שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף מצא את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = x^2 - 4 \quad (x \geq 0) \quad (4) \quad f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

(4) מצא איזה מבין הפונקציות הבאות הוא זוגיות ואיזה זוגיות :

$$y = \frac{1}{x} \quad (4) \quad y = 1 \quad (3) \quad y = x^4 + x^{10} \quad (2) \quad y = 4x^3 \quad (1)$$

$$y = \sin x \cdot \cos x \quad (8) \quad y = \ln x + x^2 \quad (7) \quad y = 2^x \quad (6) \quad y = x^2 + \sin^2 x \quad (5)$$

(5) מצא את המחזור של כל אחת מהפונקציות הבאות :

$$y = \sin^2 x \quad (4) \quad y = \tan \frac{x}{3} \quad (3) \quad y = 5 + 3\sin(4x+1) \quad (2) \quad y = 2\sin x \quad (1)$$

(6) רשום כל אחת מהפונקציות הבאות כפונקציה מפוצלת* ושרטט את גרף הפונקציה.

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4) \quad y = x^2 + 2|x-1| \quad (3) \quad y = 3|x+1| \quad (2) \quad y = |x-2| \quad (1)$$

* יש הקוראים לפונקציה "מפוצלת", פונקציה "מוטלאת" או פונקציית "תפר" או פונקציה "לפי מקרים".

פתרונות

(1)

$$\begin{array}{lllll}
 x \neq 2, -1 \quad (5) & x \neq 0, 1, -1 \quad (4) & x \text{ כל } (3) & x \neq \pm 2 \quad (2) & x \text{ כל } (1) \\
 x < -2 \text{ או } x > 1 \quad (10) & -1 < x < 1 \quad (9) & x \text{ כל } (8) & x \leq -2 \text{ או } x \geq 1 \quad (7) & x \geq 4 \quad (6) \\
 x \neq \pi/4 \cdot k \quad (15) & x \neq \pi/20 + \pi/10 k \quad (14) & 0 < x \neq 1 \quad (13) & x \text{ כל } (12) & 0 < x \neq 1 \quad (11) \\
 & & -2 < x < 0 \quad (18) & 3 < x < 5 \quad (17) & x \text{ כל } (16)
 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{lllll}
 x \quad (6) & x - 8 \quad (5) & \frac{4}{x-4} \quad (4) & x^2 - 4 \quad (3) & 4 \quad (2) & -3 \quad (1)
 \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{llll}
 y \neq 3, \quad f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3} \quad (3) & y \neq 1, \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1} \quad (2) & y \text{ כל}, \quad f^{-1}(x) = 3x+1 & (1) \\
 & & y \geq -4, \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} & (4)
 \end{array}$$

(4)

זוגיות - 2,3,5,8 אי זוגיות - 1,4 כלליות - 6,7

(5)

$$\begin{array}{llll}
 \pi \quad (4) & 3\pi \quad (3) & \pi/2 \quad (2) & 2\pi \quad (1)
 \end{array}$$

(6)

$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2) \qquad y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4) \qquad y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

פרק 2 - גבול של פונקציה

(1) חשב את הגבולות הבאים (הצבה):

$$\lim_{x \rightarrow 100} 20 \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1 \quad (1)$$

(2) חשב את הגבולות הבאים (צמצום/פירוק לגורמים):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x-1} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x-3} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x+1} \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x-2} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5) \\ & & & \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9) \end{aligned}$$

(3) חשב את הגבולות הבאים (כפל בצמוד):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x^2 + x + 2} + x} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5) \end{aligned}$$

(4) חשב את הגבולות הבאים (היעזר בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7) \end{aligned}$$

(5) חשב את הגבולות הבאים (פונקציה השואפת לאינסוף):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9) \end{aligned}$$

(6) חשב את הגבולות הבאים (x שואף לאינסוף) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x} - x \right) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x \right) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + kx} - x \right) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx} \right) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

(7) חשב את הגבולות הבאים (העזר בגבול של אוילר $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4}\right)^{4x^2} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+2x+2}\right)^{10x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x}\right)^x \quad (9)$$

(8) חשב את הגבולות הבאים (ע"י שימוש בכלל הסנדוויץ'):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [x] \quad (10)$$

(9) חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ של הפונקציות הבאות (גבול של פונקציה מפורצלת):

$$(a=0) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(a=1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x > 1 \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$(a=0) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (3)$$

$$(a=\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$(a=-\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (5)$$

(10) חשב על פי הגדרת הגבול את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} \quad (5)$$

$$(11) \text{ הוכח על פי הגדרה את הגבול: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1$$

הערה חשובה מאוד!

במרבית קורסי החדו"א לומדים בהמשך את כלל לופיטל לחישוב גבולות. בעזרת כלל זה ניתן לחשב ללא מאמץ את הגבולות המופיעים בשאלות 2, 3 ו-4.

פתרונות

									(1)
						40 (4)	2 (3)	$\frac{11}{12}$ (2)	21 (1)
									(2)
$\frac{8}{17}$ (9)	27 (8)	3 (7)	32 (6)	-3 (5)	$n-1$ (4)	6 (3)	$\frac{10}{8.5}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)	
									(3)
	$-\frac{8}{3}$ (8)	$\frac{1}{3}$ (7)	$\frac{3}{4}$ (6)	$\frac{1}{6}$ (5)	$\frac{3}{8}$ (4)	$-\frac{1}{12}$ (3)	4 (2)	$\frac{1}{2}$ (1)	
									(4)
1 (9)	4 (8)	$\frac{1}{8}$ (7)	$\frac{1}{2}$ (6)	$\frac{1}{2}$ (5)	$\frac{1}{2}$ (4)	$\frac{1}{2}$ (3)	$\frac{3}{4}$ (2)	$\frac{3}{4}$ (1)	
									(5)
0 (9)	ϕ (8)	∞ (7)	∞ (6)	$-\infty$ (5)	ϕ (4)	$-\infty$ (3)	ϕ (2)	ϕ (1)	
						$-\infty$ (12)	ϕ (11)	1 (10)	
									(6)
-3 (9)	-1 (8)	1 (7)	-5 (6)	0 (5)	$-\infty$ (4)	4 (3)	$-\frac{\pi}{2}$ (2)	0 (1)	
$e^{\frac{1}{3}}$ (18)	$\ln 3$ (17)	2 (16)	$\frac{1}{9}$ (15)	4 (14)	0 (13)	0.25 (12)	$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11)	1.5 (10)	
	$\frac{a-b}{2}$ (26)	1/2 (25)	-1/2 (24)	1/2 (23)	$k/2$ (22)	2.5 (21)	(**) (20)	0 (19)	
									(7)
e (9)	e^{30} (8)	e^{-12} (7)	e (6)	e^3 (5)	e^{-1} (4)	e^2 (3)	1 (2)	$e^{\frac{1}{2}}$ (1)	
									(8)
1 (9)	4 (8)	0.75 (7)	0 (6)	0 (5)	3 (4)	0.75 (3)	0 (2)	0 (1)	
								0 (10)	
									(9)
					-1 (5)	1 (4)	ϕ (3)	ϕ (2)	4 (1)
									(10)
	$\pm\infty$ (7)	$\sin \pi/4$ (6)	1 (5)	5 (4)	0 (3)	9 (2)	28 (1)		

(**) בשאלה 6 תרגיל 20 יש להפריד לשלושה מקרים:

$$\lim = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \Leftarrow b \neq 0 \text{ (I)}$$

$$\lim = \infty \Leftarrow a > 0, b = 0 \text{ (II)}$$

$$\lim = -\infty \Leftarrow a < 0, b = 0 \text{ (III)}$$

פרק 3 - רציפות ומשפט ערך הביניים

רציפות

(1) בדוק את רציפות הפונקציות הבאות ב"נקודת התפר" שלהן :
(בסעיפים 3 ו-4 שרטט את גרף הפונקציה).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (2) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (4) \qquad f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (6) \qquad f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (5)$$

* נקודת התפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

למשל, נקודת התפר בתרגיל 1 היא $x=0$.

(2) מה צריך להיות הערך של הקבוע k על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות לכל x :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (2) \qquad f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (4) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (3)$$

הערה : על סעיף 4 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל .

(3) מה צריך להיות הערך של הקבועים a ו- b על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות

בתחום הגדרתן :

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \quad (2) \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \quad (1) \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \quad (4) \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^{\frac{1}{x}} - 2}{2^{\frac{1}{x}} + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

הערה : על סעיפים 3 ו-4 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל .

(4) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלה (1) רשום עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא.

(5) הוכח או הפרך :

1. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
 2. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
 3. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
 4. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- (6) ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה. האם $f + g$ רציפה? הוכח את טענתך.

משפט ערך הביניים (של קושי)

(7) צטט את משפט ערך הביניים של קושי והסבר אותו גרפית.

(8) הוכח שלמשוואות הבאות יש לפחות פתרון אחד :

$$x - 0.25 \sin x = 7 \quad (3) \quad x^2 = -\ln x \quad (2) \quad x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

(9) הוכח שלמשוואה $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ יש לפחות פתרון אחד.

(10) הוכח שלמשוואות הבאות יש לפחות שני פתרונות :

$$4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (2) \quad e^x - 5x = 0 \quad (1)$$

(11) תהי f פונקציה רציפה לכל x המקיימת: $f(0) = 1, f(1) = 2$.

הוכח שלמשוואה $f(x) + \sin x = 4x$ יש לפחות פתרון אחד.

(12) מצא קטע שאורכו אינו עולה על יחידה אחת בו למשוואה $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$ יש פתרון.

$$(13) \text{ נגדיר } f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$$

א. חשב $f(0), f(2)$.

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$ יש פתרון בקטע $(0, 2)$.

פתרונות

(1) (1) לא רציפה. (2) לא רציפה. (3) רציפה. (4) רציפה. (5) רציפה בנקי: $x = 0, 1$, לא רציפה

בנקודה $x = 2$. (6) רציפה בנקי $x = 1$. לא רציפה בנקי $x = 2$. (2) (1) $k = 1$. (2) $k = 4$.

(3) $k = \frac{2}{3}$. (4) $k = -1$. (3) (1) $a = 0, b = \frac{1}{2}$. (2) $a = 1, b = 2$ או $a = 2, b = 1$.

(3) $a = -2e^{-1}, b = e^{-1}$. (4) $a = e/3, b = -e/3$. (4) (1) סליקה. (2) סליקה. (5) מסוג

ראשון. (6) סליקה. (12) $[0.1, 1]$. (13) א. $f(0) = -1, f(2) = 5$. ב. לא.

פרק 4 - גזירות של פונקציה, הגדרת הנגזרת

- (1) א. תאר שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודת הפיצול (תפר) שלה. השתמש בפונקציה מסעיף ב.3. שלהלן כדי להדגים שתי שיטות אלה. בנוסף, הסבר מתי עליך להשתמש בכל אחת מהשיטות שתיארת.
- ב. בדוק גזירות הפונקציות הבאות בתחום הגדרתן בכל דרך שתבחר. בנוסף רשום נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5 < x < 0 \\ x^2 + 2x & x \geq 0 \end{cases} \quad (4) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = 3x^2 + x|x| + 1 \quad (6) \quad f(x) = 2 + 4|x-1| \quad (5)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8) \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} + a & x < -1 \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

- א. עבור איזה ערך של הקבוע a הפונקציה רציפה בנקודה $x = -1$.
- ב. עבור ערך ה- a שקיבלת בסעיף א בדוק על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x = -1$.
- (3)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x \geq 0 \\ -(x+1)^2 & x < 0 \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

- א. האם הפונקציה רציפה?
- ב. בדוק על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x = 1$.
- (4) עבור איזה ערכים של הקבועים a ו- b יהיו הפונקציות הבאות גזירות בנקודת התפר. עבור ערכים אלה, רשום נוסחה עבור הנגזרת.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases} \quad (ב) \quad f(x) = \begin{cases} \ln^3 x & 0 < x \leq e \\ ax + b & x > e \end{cases} \quad (א)$$

(5) חשב על פי הגדרת הנגזרת את נגזרות הפונקציות הבאות :

$$f(x) = \sin 4x \quad (3) \quad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (2) \quad f(x) = x^2 + 4x + 1 \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{x+10} \quad (6) \quad f(x) = \ln x \quad (5) \quad f(x) = e^x \quad (4)$$

* בתרגיל זה אסור להשתמש בכלל לופיטל.

(6) חשב את $f'(0)$ עבור כל אחת מהפונקציות הבאות :

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44) \quad (1)$$

$$f(x) = 2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{\sin x(x-4)^{10}(1+\tan x)^4 \cos(x+\sin x)}{(x-1)^2(x-10)^{10}} \quad (3)$$

$$\left(z(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} z(x) = 4 : \right) \quad z'(x) = x \cdot z(x) \quad (4)$$

$$f(x) = |x^4 - x^3 + \sin(10x) - 1| \quad (5)$$

(7) בדוק האם הפונקציה משאלה (1) סעיף 4 גזירה פעמיים בנקודה $x = 0$.

(8) הוכח או הפרך (אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא הבא דוגמה נגדית לטענה):

א. אם h גזירה ב- x_0 , ו- g אינה גזירה ב- x_0 אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .

ב. אם h אינה גזירה ב- x_0 , ו- g אינה גזירה ב- x_0 אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .

ג. אם h אינה גזירה ב- x_0 , ו- g אינה גזירה ב- x_0 אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .

ד. אם h גזירה ב- x_0 , ו- g אינה גזירה ב- x_0 אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .

פתרונות

$$\begin{aligned}
 & f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (2) & f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (1) \\
 & f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+2x} & -0.5 < x < 0 \\ 2x+2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (4) & f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (3) \\
 & f'(x) = \begin{cases} 8x & x \geq 0 \\ 4x & x < 0 \end{cases} \quad (6) & f'(x) = \begin{cases} 4 & x > 1 \\ -4 & x < 1 \end{cases} \quad (5) \\
 & f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8) & f'(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (7)
 \end{aligned}$$

לתשומת לבך! בתחומים בהם קיימת נוסחה לנגזרת, הפונקציה גזירה. בנקודות בהן הנגזרת לא קיימת הפונקציה לא גזירה. למשל, בסעיף 1 הפונקציה גזירה עבור $x \neq 2$.

(2) (1) $a=1$ לא גזירה.

(3) (1) רציפה (2) לא גזירה.

(4) (א) $a=3/e, b=-2$ (ב) $a=e, b=0$

(5)

$$f'(x) = 4 \cos(4x) \quad (3) \quad f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \quad (2) \quad f'(x) = 2x+4 \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}} \quad (6) \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad (5) \quad f'(x) = e^x \quad (4)$$

$$-10 \quad (5) \quad 4 \quad (4) \quad (0.4)^{10} \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 44! \quad (1) \quad (6)$$

(7) לא גזירה פעמיים.

פרק 5 - גזירה של פונקציה

(1) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות (בסעיפים 27-29 גזור פעם אחת):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2(1-x)} \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

פתרונות

$$(2) \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3}$$

$$(4) \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} \quad f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$$

$$(6) \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4}$$

$$(8) \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

$$(10) \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x}$$

$$(12) \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2}$$

$$(13)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\}$$

$$(15) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x + 2}{x^4} \right) \quad f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 + 2x}{x^4} \right)$$

$$(16)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2)$$

$$(17)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}}$$

$$(18)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}}$$

(19)

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$$

(20)

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3)$$

(21)

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4)$$

(22)

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x$$

(23)

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)}$$

(24)

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2 \tan(x^2)$$

(25)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2-3x-2}}, \quad f''(x) = \frac{2x+3}{2(-x^2-3x-2)^{3/2}}$$

(27)

(26)

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$$

(29)

(28)

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x)$$

פרק 10 - חקירת פונקציה - "שאלות מסביב"

(1)

(א) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת קיצון. מצא את הקבוע a .

(ב) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת קיצון.

מצא את הקבועים a, b .

(ג) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת פיתול. מצא את הקבוע a .

(ד) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת פיתול.

מצא את הקבועים a, b .

(ה) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 3$ הוא 33.

מצא את a .

(ו) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3, 9)$ הוא 12.

מצא את a, b .

(ז) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^3 + x^2}{2x^3 + x + 6}$. ידוע שהישר $y = 4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.

מצא את a .

(ח) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x}$. ידוע שהישר $y = 0.5x + 1$ אסימפטוטה לגרף

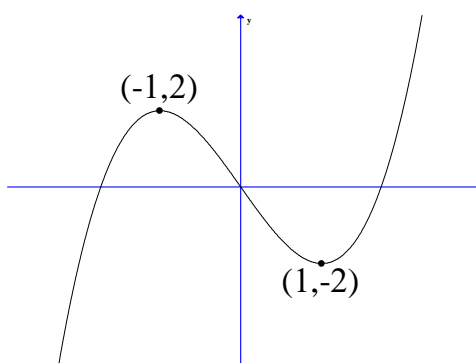
הפונקציה. מצא את a ואת b .

(ט) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + ax + 6}$. ידוע שהישר $x = 1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.

מצא את a .

(2) לפניך גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$

- א. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$.
- ב. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$.
- ג. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$.
- ד. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד.
- ה. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות.
- ו. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות.
- ז. האם קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון.
- ח. מצא את התחומים בהם הפונקציה היא ח"ע.



(3) הוכח את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם:

$$(1) \quad (-\infty < x < \infty) \quad 8x^3 \leq 3x^4 + 6x^2 \quad (2) \quad (0 < x < \frac{\pi}{3}) \quad x < 2 \sin x$$

$$(3) \quad (x > 0) \quad \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2} \quad (4) \quad (x \geq 0) \quad \ln(x+1) \leq x$$

פתרונות

(1)

$a = -\frac{1}{3}$ (ג)

$b = 6, a = -4$ (ב)

$a = -\frac{2}{3}$ (א)

$a = \frac{2}{3}, b = -1$ (ו)

$a = 1$ (ה)

$b = 3, a = -1$ (ד)

$a = -7$ (ט)

$a = 0.5$ (ח)

$a = 8$ (ז)

(2)

3 (ג)

2 (ב)

1 (א)

$-2 < k < 2$ (ו)

$k = \pm 2$ (ה)

$k < -2$ או $k > 2$ (ד)

$-1 < x < 1$ או $x < -1$ (ח)

לא (ז)

או $x > 1$

פרק 16 - טור טיילור/מקלורן

(1) מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן) של הפונקציות הבאות:
* תוכל להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח שבעמוד האחרון.

$$f(x) = \sinh x \quad (3) \quad f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2) \quad f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6) \quad f(x) = \cos^2 x \quad (5) \quad f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9) \quad f(x) = \ln(2-3x+x^2) \quad (8) \quad f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (12) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (11) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (15) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (14) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (18) \quad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (17) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (16)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (21) \quad f(x) = \ln(1-x) \quad (20) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad (19)$$

$$f(x) = \arctan(x/3) \quad (24) \quad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (23) \quad f(x) = \ln(5-x) \quad (22)$$

הערות: לפתרון סעיפים 16,17 עליך להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים 18,19,23,24 עליך להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.

(2) מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = x_0$ של הפונקציות הבאות:

$$\left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right) f(x) = \sin x \quad (3) \quad \left(x_0 = 2\right) f(x) = \frac{1}{x} \quad (2) \quad \left(x_0 = 1\right) f(x) = \ln x \quad (1)$$

(3) מצא את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות הבאות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים):

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (3) \quad f(x) = \tan x \quad (2) \quad f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (1)$$

(4) חשב את סכום הטורים הבאים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} \quad (9) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad (7)$$

(5) חשב את ערך הגבול בתרגילים הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (1)$$

(6) חשב בשגיאה הקטנה מ- 0.001 :

$$\arctan 0.25 \quad (3) \quad \sin 3^\circ \quad (2) \quad \frac{1}{e} \quad (1)$$

(7) חשב בעזרת n איברים ראשונים (שונים מאפס) בפיתוח לטור מקלורן והערך את השגיאה בחישוב :

$$(n=4) \ln 1.5 \quad (3) \quad (n=1) \cos 4^\circ \quad (2) \quad (n=3) \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (1)$$

(8)

א. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$ עבור $|x| \leq \frac{\pi}{6}$.

ב. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\ln(1+x) \cong x$ עבור $|x| < 0.01$.

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ עבור $|x| \leq 0.2$.

(9)

א. עבור אילו ערכי x , $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ- 0.001 .

ב. עבור אילו ערכי x , $\arctan x \cong x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ- 0.01 .

(10) חשב בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε .

$$(\varepsilon = 0.001) \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (2) \qquad (\varepsilon = 0.0001) \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

$$(\varepsilon = 0.0001) \int_0^{0.5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (3)$$

נוסחת השארית של לגרנז'

(11) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0 = 0$,

כולל שארית לגרנז'. חשב בעזרת הנוסחה שקיבלת את $\sqrt[3]{66}$ והערך את השגיאה בקירוב.

(12) רשום את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x) = \tan x$ סביב $x_0 = 0$,

כולל שארית לגרנז'. חשב בעזרת הנוסחה שקיבלת את $\tan 0.1$ והערך את השגיאה בקירוב.

(13) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt{x+4}$ סביב $x_0 = 0$,

כולל שארית לגרנז'. חשב בעזרת הנוסחה שקיבלת את $\sqrt{5}$ והערך את השגיאה בקירוב.

(14) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{x}$ סביב $x_0 = 16$,

כולל שארית לגרנז'. חשב בעזרת הנוסחה שקיבלת את $\sqrt[4]{15}$ והערך את השגיאה בקירוב.

הערה לגבי קירובים:

אם מבקשים קירוב שהוא מדויק ל- n ספרות אחרי הנקודה, אז עלינו לדרוש, שהערך המוחלט

של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n} . למשל דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו

שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$.

אני בספר לא השתמשתי בניסוח זה, אך יש המשתמשים בו.

פתרונות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (4)$$

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

$$\ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 \leq x < 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (7)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10)$$

$$(|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12)$$

$$(|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1\right) x^n \quad (16)$$

$$(-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20)$$

$$(|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (22)$$

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1} (n+1)} \quad (24)$$

$$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1} (2n+1)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}} \quad (0 < x < 4) \quad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \quad (0 < x \leq 2) \quad (1)$$

$$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \quad (3)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (2)$$

$$1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{331}{720}x^6 + \dots \quad (1)$$

$$\ln \frac{3}{2} \quad (9) \quad \ln 2 \quad (8) \quad \cos 1 \quad (7) \quad \sin 1 \quad (6) \quad \pi/4 \quad (5) \quad 2e \quad (4) \quad \sqrt{e} \quad (3) \quad e^{-2} \quad (2) \quad e \quad (1)$$

$$\frac{1}{160} \quad (9) \quad \frac{77}{192} \quad (3) \quad \frac{\pi \cdot \pi}{4050} \quad (2) \quad \frac{1}{48} \quad (1)$$

$$\frac{1}{160} \quad (9) \quad \frac{77}{192} \quad (3) \quad \frac{\pi \cdot \pi}{4050} \quad (2) \quad \frac{1}{48} \quad (1)$$

$$(0.2)^6 / 6! \quad (2) \quad (0.01)^2 / 2 \quad (2) \quad (\pi/6)^5 / 5! \quad (1)$$

$$|x| < \sqrt[3]{9/100} \quad (2) \quad |x| < \sqrt[5]{3/25} \quad (1)$$

$$143/576 \quad (3) \quad 39/400 \quad (2) \quad 449/2250 \quad (1)$$

פרק 17 - סדרות

(1) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^3 + 10n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\ln n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 5n + 6}{2n + 10} - \frac{n}{2} \right) \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^5 + 10n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n + 4^{n+1}}{2^{4n+2} + 2^{n+3}} \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{5n-1}} \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^2 + 6 + 27n^6}}{\sqrt{3n^3 + 10n + 4n^4}} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3n^3 - 5n - 1}{n^3 - 2n^2 + 1} \right) \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}} \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^n + 3^{n+1}}{81^{0.5n} + 3^{n+3}} \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n) \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}} \quad (14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^4 + 10n}} \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2) \quad (18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \quad (17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n) \quad (16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n \quad (20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + bn}) \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3} \right)^n \quad (24)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{n^2-1} \quad (23)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^n \quad (22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{n} \right)^n \quad (27)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 4n + 1}{n^2 + 2n + 2} \right)^{10n} \quad (26)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n + 4} \right)^{4n^2} \quad (25)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \sin n}{4n + \cos n} \quad (30)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(2n+1)}{n} \quad (29)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \quad (33)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \arctan(2n-3)}{4n + \arctan(n - \ln n)} \quad (32)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + \sin 2n}{n^2 + \cos 3n} \quad (31)$$

הערה חשובה מאוד !

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה n , המשתנה x . יש להתייחס אל x כאל מספר טבעי ! בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

(2) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{4n+\frac{1}{n}}} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + n^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 4n + 1} \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin\left(\frac{4}{n}\right) \quad (7)$$

$$4^n \sin \frac{1}{n} \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n + (-1)^n}{n} \right]^n \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi n}{2} \quad (10)$$

(3) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \quad (4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} \quad (3)$$

$$* \text{ רמזים: סעיף 1 - } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \cdot \text{ סעיף 2 - הוכח כי } a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

(4) בתרגילים הבאים נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה).

הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right), a_1 = 2 \quad (3) \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}, a_1 = 2 \quad (2) \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, a_1 = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$(5) \text{ נתונה הסדרה } a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}, a_1 = 1, a_2 = 1$$

א. 1. נגדיר סדרה חדשה b_n על ידי: $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$. הוכח שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ קיים וחשב אותו.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכח שהסדרה a_n שואפת לאינסוף.ב. 1. מצא ביטוי סגור עבור הסדרה a_n (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

2. ענה שוב על סעיף א.1. בעזרת הביטוי הסגור שמצאת.

3. הוכח באינדוקציה שהביטוי הסגור שמצאת בסעיף הקודם הוא אכן נכון.

(6) על סמך ההגדרה של גבול של סדרה הוכח כי :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{2n^2 + 3} = \frac{1}{2} \quad \text{ג.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 \quad \text{ב.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{4n + 3} = \frac{1}{2} \quad \text{א.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \cos^2 n}{n^2 + 2} = 0 \quad \text{ו.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 3} = 2 \quad \text{ה.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1} = 1 \quad \text{ד.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2 + 5n + 6 = \infty \quad \text{ט.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 4 = \infty \quad \text{ח.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n) = 2 \quad \text{ז.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = -\infty \quad \text{יב.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n+1} = \infty \quad \text{יא.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log(2n + 5) = \infty \quad \text{י.}$$

(7) הוכח או הפרך :

(1) אם a_n סדרה חסומה אז יש לה גבול.

(2) אם b_n סדרה לא חסומה אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$.

(3) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -k$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = k$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = k$.

(4) אם d_n סדרה עולה אז היא לא חסומה.

(5) אם ל- a_n ו- b_n אין גבול אז גם ל- $(a_n + b_n)$ וגם ל- $(a_n \cdot b_n)$ אין גבול.

(6) אם ל- a_n ו- b_n אין גבול אז גם ל- (a_n / b_n) אין גבול.

(7) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתבדרת.

(8) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתכנסת.

(9) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{L}$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = L$.

(10) אם $a_n < b_n$ לכל n אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

(11) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ואם b_n חסומה אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$.

(12) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k$ ואם $a_n < 1$ לכל n אז $k < 1$.

(13) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = 1$.

פתרונות

- (1) (1) 0 (2) .4 (3) ∞ (4) 0 (5) .5 (6) .1 (7) 1.5 (8) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (9) 0.25 (10) .4 (11) .2
- (12) $\ln 3$ (13) $e^{1/3}$ (14) $(\lim a_n = \infty) \Leftrightarrow (a > 0, b = 0)$, $(\lim a_n = \sqrt[3]{a/b}) \Leftrightarrow (b \neq 0)$
- ,
 $(\lim a_n = -\infty) \Leftrightarrow (a < 0, b = 0)$ (15) .2.5 (16) $\frac{k}{2}$ (17) .0.5 (18) .0.5 (19) $\frac{a-b}{2}$ (20) $e^{0.5}$
- (21) .1 (23) e^{-1} (24) e^3 (25) e^{-12} (26) e^{30} (27) e (28) .0 (29) .0 (30) .0.75 (31) 3
- (32) $\frac{3}{4}$ (33) .4 (2) 0 (1) (2) 0 (2) 0 (3) .4 (4) $\frac{1}{4e}$ (5) ∞ (6) .1 (7) .4 (8) 0.5 (9) $\frac{1}{3}$
- (10) אין גבול. (11) אין גבול. (12) ∞ (3) (1) .1 (2) 0 (3) .1 (4) .1 (4) (4) (1) הגבול .2
- (2) הגבול .1 (3) הגבול .1 (5) א.1. הגבול $\frac{1}{3}$.1. ב.1. $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$

פרק 18 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרל מיידי)

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int 4dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) \qquad \int \left(-\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx \quad (8) \qquad \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \qquad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21) \qquad \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24) \qquad \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx \quad (23) \qquad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27) \qquad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26) \qquad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25)$$

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right) dx \quad (30) \qquad \int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx \quad (29) \qquad \int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32) \qquad \int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

$$\int 2 \sin 4x + \cos x dx \quad (36) \qquad \int \sin \frac{x}{2} dx \quad (35) \qquad \int \cos 4x dx \quad (34)$$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 19 - האינטגרל הלא מסויים (הנגזרת כבר בפנים)

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3) \qquad \int \cot x dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5) \qquad \int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9) \qquad \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \qquad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15) \qquad \int \sin(x^2+1)x dx \quad (14) \qquad \int \cos(10x^4+1)x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{\ln(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \sqrt{x^2+1} \cdot 2x dx \quad (21) \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \qquad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23) \qquad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^2 dx \quad (22)$$

* הערה : את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.
* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 20 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרציה בחלקים)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int x \sin x dx \quad (3) \qquad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \qquad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \qquad \int x \cos 2x dx \quad (4) \qquad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int \ln x dx \quad (7) \qquad \int x^2 e^{-4x} dx \quad (6)$$

$$\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \qquad \int \arcsin x \quad (10) \qquad \int \arctan x \quad (9)$$

$$\int x \arctan x \quad (14) \qquad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13) \qquad \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12)$$

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \qquad \int \ln^2 x dx \quad (16) \qquad \int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \qquad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19) \qquad \int e^x \cos x dx \quad (18)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \qquad \int x \tan^2 x dx \quad (22) \qquad \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21)$$

(2) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int x^4 e^x dx$.

(3) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \cos^4 x dx$.

(4) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \cos^4 x dx$.

(5) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$.

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 21 - האינטגרל הלא מסויים (שיטת ההצבה)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים (הצבות רגילות):

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3)$$

$$\int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2)$$

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9)$$

$$\int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8)$$

$$\int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12)$$

$$\int x^3(3x^2-1)^{14} dx \quad (11)$$

$$\int \cos(x^2+1) \cdot 2x^3 dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15)$$

$$\int \ln^3 x dx \quad (14)$$

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18)$$

$$\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20)$$

$$\int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \cdot \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23)$$

$$\int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

הערה: בחלק מהתרגילים, לאחר ההצבה, תידרש לאינטגרציה בחלקים.

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 22 - האינטגרל הלא מסויים (פונקציות רציונליות)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (11)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4} dx \quad (23)$$

$$\int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1} dx \quad (21)$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2}}{x+1} dx \quad (4)$$

$$\int \sqrt{1+e^x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx \quad (5)$$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 23 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרלים טריגונומטריים והצבות

טריגונומטריות)

אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת זהויות בלבד)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{1}{\sin^2 10x} dx \quad (3) \quad \int \frac{1}{\cos^2 4x} dx \quad (2) \quad \int (\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3}) dx \quad (1)$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (6) \quad \int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad (5) \quad \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} dx \quad (9) \quad \int \tan^2 x dx \quad (8) \quad \int \sin x \cos x \cos 2x dx \quad (7)$$

$$\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (12) \quad \int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx \quad (11) \quad \int \sin 7x \cos 5x dx \quad (10)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (15) \quad \int \sin^2 4x dx \quad (14) \quad \int \cos^2 x dx \quad (13)$$

$$\int \sin^4 2x dx \quad (18) \quad \int \cos^4 x dx \quad (17) \quad \int \sin^3 4x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx \quad (21) \quad \int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx \quad (20) \quad \int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad (19)$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (24) \quad \int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (23) \quad \int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad (22)$$

אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)

זכור :

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \left. \begin{array}{l} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{array} \right| = \int f(t) dt$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \left. \begin{array}{l} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{array} \right| = \int f(t) (-dt)$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \cos^3 x dx \quad (3) \quad \int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx \quad (2) \quad \int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx \quad (1)$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad (6) \quad \int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (5) \quad \int \sin^3 2x dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (9) \quad \int \tan^5 x dx \quad (8) \quad \int \cos^5 x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx \quad (12) \quad \int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx \quad (11) \quad \int \frac{dx}{\sin x} \quad (10)$$

אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)

זכור :

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \left. \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3) \quad \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2) \quad \int \frac{1}{1 + \sin x} dx \quad (1)$$

אינטגרלים עם שורשים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)

$$\int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt)$$

$$\int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right)$$

$$\int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right| = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right)$$

(4) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \sqrt{4x^2 - 1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} \quad (1)$$

$$\int \sqrt{x^2 + 2x - 3} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{(4 + x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 24 - האינטגרל המסוים

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3) \quad \int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2) \quad \int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_0^\pi \cos^2 10x dx \quad (6) \quad \int_1^4 \frac{1}{x^2+4x+1} dx \quad (5) \quad \int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|} dx \quad (8) \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{כאשר } \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx \quad (2) \quad \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (1)$$

(3) נתונה פונקציה רציפה f . הוכח :

$$א. \text{ אם } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \text{ אזי}$$

$$ב. \text{ אם } \int_{-a}^a f(x) dx = 0 \text{ אזי}$$

(4) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (2) \quad \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{x^3 + x^5} dx \quad (1)$$

(5) הוכח את אי השוויונים הבאים :

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (3) \quad 6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (2) \quad \frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (6) \quad 0.9 \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq 1 \quad (5) \quad \frac{1}{2}e^{-10} < \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx < 1 \quad (4)$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (9) \quad -\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln x}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (8) \quad \frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (7)$$

(6) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^3} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2+n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

(7) חשב את האינטגרלים הבאים על פי ההגדרה (של רימן) :

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad (1) \quad \int_0^1 x^3 dx \quad (3) \quad \int_0^1 x^2 dx \quad (2) \quad \int_0^1 x dx \quad (1)$$

* תוכל להיעזר בזהויות הבאות :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 0.5n(n + 1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n}{2} \alpha \sin \frac{n+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

פרק 25 - משוואות מסדר ראשון

הפרדת משתנים

- מדר הניתנת להפרדת משתנים - הסבר
- הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית הניתנת להפרדת משתנים וכיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2) = 1 ; (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1) = -1 ; \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi) = 1 ; y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$y(0) = 4 ; \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0) = 1 ; \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

תשובות:

$$y = \pm \sqrt{x^2 + k} \quad (1)$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (2)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x|-c}, \quad y=0 \quad (3)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (5)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (6)$$

$$\frac{x^2}{2} + x = \frac{y^2}{2} + c, \quad y = -2 \quad (7)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (8)$$

$$x = 1 + \tan(t + c) \quad (9)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (10)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (11)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (12)$$

משוואה הומוגנית

- פונקציה הומוגנית - הסבר
- הגדר והדגם את המושג פונקציה הומוגנית של שני משתנים.
- מדר הומוגנית - הסבר
- הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית הומוגנית וכיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2 dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2 y' = xy y' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2 e^{(x/y)^2} + 2x^2 e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8)$$

$$(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 \quad (9)$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית.

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של n שמצאת בסעיף א.

תשובות:

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln|2(y/x)^3 + 1| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|(y/x) - 1| - \frac{5}{4} \ln|(y/x) + 3| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|2(y/x)^2 + 4| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin(y/x) + c \quad (5)$$

$$\ln(1 + e^{(x/y)^2}) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|(x/t) - (x/t)^2| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln(1 + 2(y/x)^2) + c \quad (9)$$

משוואה הומוגנית - שיטת הצבה

- מדר הומוגנית, פתרון על ידי הצבה - הסבר
 הסבר כיצד פותרים משוואות מן הצורה $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$

פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x+y}{2+x+y} \quad (1)$$

$$(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4} \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3+x+2y}{1+x+y} \quad (4)$$

$$(2x+y-3)dx + (x+y-1)dy = 0 \quad (5)$$

תשובות:

$$x = \frac{1}{2}(x+y+1) + \frac{1}{4} \ln(2(x+y+1)+1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5 \quad (1)$$

$$0 = 14y - (x+2y+3)^2 + k \quad (2)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y+2}{x-1} - 1 \right| - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{y+2}{x-1} + 1 \right| + c, \quad y = x-3, \quad y = -x-1 \quad (3)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{4} \left[-(2+\sqrt{2}) \ln \left| \sqrt{2} - 2 \frac{y+2}{x-1} \right| + (-2+\sqrt{2}) \ln \left| \sqrt{2} + 2 \frac{y+2}{x-1} \right| \right] + c, \quad y = \sqrt{0.5x-2} - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5x-2} + \sqrt{0.5} \quad (4)$$

$$\ln|x-2| = \frac{1}{2} \ln \left(2 + 2 \frac{y+1}{x-2} + \left(\frac{y+1}{x-2} \right)^2 \right) + c \quad (5)$$

משוואה מדויקת

- מדר מדויקת - הסבר
הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית מדויקת וכיצד פותרים אותה

פתור את המשוואות הבאות:

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (1)$$

$$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2e^y - 1)dy = 0 \quad (3)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2 \right) dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1) \right) dy = 0 \quad (5)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (6)$$

- (7) נתונה המשוואה $(3x^2 + ye^{xy})dx + (2y^3 + kxe^{xy})dy = 0$ באשר k קבוע.
- א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת.
- ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שמצאת בסעיף א.

תשובות:

$$0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (1)$$

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (2)$$

$$y \sin x + x^2 e^y - y = c \quad (3)$$

$$x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (4)$$

$$\ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c \quad (5)$$

$$x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (6)$$

$$k=1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c \quad (7)$$

גורם אינטגרציה

- גורם אינטגרציה - הסבר
הסבר מהו גורם אינטגרציה והראה כיצד ניתן בעזרתו להפוך משוואה לא מדוייקת למשוואה מדוייקת.

(1) הראה שהמשוואה $x^2 y^3 + x(1 + y^2) y' = 0$ אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם

האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

(2) הראה שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right) dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right) dy = 0$

אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x .

(3) הראה שהמשוואה $(x + 2) \sin y dx + x \cos y dy = 0$ אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם

אינטגרציה xe^x .

(4) פתור את המשוואה $(x^2 + y^2 + x) dx + (xy) dy = 0$.

(5) פתור את המשוואה $(x - x^2 - y^2) dx + y dy = 0$.

(6) פתור את המשוואה $(2xy^3 + y^4) dx + (xy^3 - 2) dy = 0$.

(7) פתור את המשוואה $(y^2 - y) dx + x dy = 0$.

(8) פתור את המשוואה $(y - xy^2) dx + (x + x^2 y^2) dy = 0$.

(9) פתור את המשוואה $y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4}$.

תשובות:

$$0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c \quad (1)$$

$$e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad (2)$$

$$\sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c \quad (3)$$

$$0.25x^4 + 0.5x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c \quad (5)$$

$$x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c \quad (6)$$

$$x - \frac{x}{y} = c \quad (7)$$

$$-\ln x - \frac{1}{xy} + y = c \quad (8)$$

$$-\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

משוואה לינארית מסדר ראשון

- מדר לינארית מסדר ראשון - הסבר הגדר משוואה לינארית מסדר ראשון והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$x^3y' + (2-3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; x^2z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

תשובות:

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) [x^2 - 4x + C] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} [-5e^{\cos x} + C] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x [-\cot x + C] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

משוואת ברנולי

- משוואות ברנולי - הסבר
הגדר את משוואת ברנולי והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (3)$$

$$y(1) = 2.5 ; y' - \left(\frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (4)$$

$$z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (5)$$

תשובות:

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y = x^2 \left(\frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (3)$$

$$y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e} \quad (4)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}} \quad (5)$$

משוואת ריקטי

- משוואת ריקטי - הסבר
הגדר את משוואת ריקטי והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2 \quad (1)$$

$$y' = -(1 + x + x^2) - (2x + 1)y - y^2 \quad (2)$$

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2 \quad (3)$$

$$y' = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x \cos x)y + 2y^2 \cos x \quad (4)$$

תשובות:

$$y(x) = -x + \frac{1}{1 + Ce^x} \quad (1)$$

$$y(x) = -0.5e^x + \frac{e^x}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}} \quad (2)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{-x + C} \quad (3)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^x} \quad (4)$$

משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה

- בתת-פרק זה מסמנים $p = y' = \frac{dy}{dx}$.
- מדר מסדר ראשון וממעלה גבוהה - הסבר
- הגדר משוואה מסדר ראשון וממעלה גבוהה והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$4x^2 p^2 - 4x^2 p - 2xy - y^2 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \quad (2)$$

$$xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0 \quad (3)$$

$$y = 2px + p^4 x^2 \quad (4)$$

$$xp^2 - 2yp + 4x = 0 \quad (5)$$

$$6p^2 y^2 + 3px - y = 0 \quad (6)$$

תשובות:

$$(y - 2x - \sqrt{x} \cdot c_1) \cdot \left(\ln|y| + \frac{1}{2} \ln|x| - c_2 \right) = 0 \quad (1)$$

$$(\ln|y| - 2\ln|x| - c_1) \cdot (\ln|y| + 3\ln|x| - c_2) = 0 \quad (2)$$

$$(y + 0.5x - \frac{c_1}{x}) \cdot \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2 \right) = 0, \quad x > 0 \quad (3)$$

$$y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2 \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c} \quad (5)$$

$$6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2 y^2 + 3\left(\frac{c}{y^2}\right)x - y = 0 \quad (6)$$

משפט הקיום והיחידות

משפט הקיום והיחידות למדר מסדר ראשון - הסבר

$$(1) \quad y(2) = -1, \quad y' = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y}$$

א. הוכיחו ש- $y_2(x) = -\frac{1}{4}x^2$, $y_1(x) = -x + 1$ הם פתרונות לבעיה.

קבע באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבירו מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

$$(2) \quad y(0) = 0, \quad y' = \sqrt[3]{y} + 4$$

א. הוכח שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכח שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכח שלבעיה קיים פתרון יחיד ומצא אותו.

(3) פתור את הבעיה:

$$y(0) = 0, \quad y' = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + x^2 \sin y$$

$$(4) \quad y(0) = 4, \quad y' = (y-1)(x^2 + y)^5$$

א. הראה שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראה שלכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

פרק 26 - פונקציות של מספר משתנים, גבולות ורציפות

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה (בסעיפים 7 ו-8 תאר את משטחי הרמה).

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4) \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6) \qquad f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2 \quad (8) \qquad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (7)$$

(2) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy - 6)}{x^2 y^2 - 36} \quad (2) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 y} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2 + y) \ln(x^2 + y) \quad (4) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x + y - 3)}{\ln(x + y - 2)} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x + y - 3} - 1}{2x + y - 4} \quad (6) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1^+, 1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x + 2y - 3})}{x + 2y - 3} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2 + z^2))}{xy^2} \quad (8) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - y^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \quad (7)$$

(3) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (2)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (1)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (4)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (3)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (6)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (5)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (8)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (7)$$

(4) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2 + yx + y^4} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \quad (6)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (8)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) \quad (7)$$

(5) בדוק את רציפות הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$.

במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה, האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה ?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

פתרונות

- (1) (1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר y . (2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.
- (3) כל המישור. (4) $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה. (5) $y < x^2$
- (6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון. (7) ת.ה - כל המרחב. (8) ת.ה. - כל המרחב.
- (2) (1) $\frac{1}{2}$ (3) 1 (4) 0 (5) אינסוף (6) $\frac{1}{2}$ (7) 2 (8) 5.
- (3) בכל הסעיפים אין לפונקציה גבול. (4) (1) 0 (2) 0 (3) 0 (4) 0 (5) 3 (6) 0 (7) 0 (8) 0.
- (5) (1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0) = 1$ הפונקציה תהיה רציפה. (2) הפונקציה רציפה.

פרק 27 - נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות

(1) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$\text{(only } f_x) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6)$$

$$f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8)$$

$$f(x, y, z) = xy^2 z^3 \quad (9)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin ut \quad (10)$$

(2) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (3)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (4)$$

(3) (1) חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.

(2) האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$?

(3) האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה ?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(4) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה משאלה (3) בנקודה $(0,0)$

(5) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

(6) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה הבאה בתחום הגדרתה

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

הערת סימון:

	$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1$	$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$
$f = f(x, y) \Rightarrow$	$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}$	$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$
	$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12}$	$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}$

פתרונות

$$f_y = -6x^2y + 3 \quad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1) \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \quad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \quad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \quad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \quad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1 + (2x + 3y)^2} \quad f_x = \frac{2}{1 + (2x + 3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \quad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_y = 2xyz^3 \quad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \quad f_u = e^{uv} [\nu \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

$$f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut$$

$$f_{xx} = 8 - 2y^2 \quad f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1) \quad (2)$$

$$f_{yy} = -2x^2 \quad f_y = -2x^2y + 10$$

$$f_{yx} = -4xy \quad f_{xy} = -4xy$$

$$f_{xx} = 12x^2 \ln y \quad f_x = 4x^3 \ln y \quad (2)$$

$$f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2} \quad f_y = \frac{x^4}{y}$$

$$f_{yx} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x + 4y) \quad f_x = 10 \cos(10x + 4y) \quad (3)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x + 4y) \quad f_y = 4 \cos(10x + 4y)$$

$$f_{yx} = -40 \sin(10x + 4y) \quad f_{xy} = -40 \sin(10x + 4y)$$

$$f_{xz} = y \quad f_{xy} = z \quad f_{xx} = 0 \quad f_x = yz \quad (4)$$

$$f_{yz} = x \quad f_{yy} = 0 \quad f_{yx} = z \quad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \quad f_{zy} = x \quad f_{zx} = y \quad f_z = xy$$

(1) (3) הנגזרות החלקיות בנקודה (0,0) שוות אפס.

(2) הפונקציה לא רציפה בנקודה (0,0).

(3) פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

(4) לא דיפרנציאבילית.

(1) לא דיפרנציאבילית (2) דיפרנציאבילית.

(6) דיפרנציאבילית.

פרק 28 - כלל השרשרת לפונקציה של מספר משתנים

* בתרגילים בפרק זה, הנח שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

$$(1) \text{ נתון } z = \ln(x^2 - y^2), y = u^2 + v^3, x = 2u - v, \text{ חשב } z_u, z_v.$$

$$(2) \text{ נתון } z = e^{u-v}, u = t^2 + 4m, v = 4t + k^2, \text{ חשב } \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial m}, \frac{\partial z}{\partial k}.$$

$$(3) \text{ נתון } z = f(x^2 - y^2) \text{ הוכח } y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0.$$

$$(4) \text{ נתון } z = f(xy) \text{ הוכח } x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0.$$

$$(5) \text{ נתון } z = f\left(\frac{x}{y}\right) \text{ הוכח } x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0.$$

$$(6) \text{ נתון } z = f(x - y, y - x) \text{ הוכח } z_x + z_y = 0.$$

$$(7) \text{ נתון } w = f(x - y, y - z, z - x) \text{ הוכח } w_x + w_y + w_z = 0.$$

$$(8) \text{ נתון } u = \sin x + f(\sin y - \sin x) \text{ הוכח } u_x \cos y + u_y \cos x = \cos x \cos y.$$

$$(9) \text{ נתון } z = y \cdot f(x^2 - y^2) \text{ הוכח } \frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}.$$

$$(10) \text{ נתון } z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right) \text{ הוכח } x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z.$$

$$(11) \text{ נתון } u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \text{ הוכח } xu_x + yu_y + zu_z = 2u.$$

$$(12) \text{ נתון } h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax) \text{ הוכח } h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}.$$

$$(13) \text{ נתון } u(x, y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$$

$$\text{הוכח: א. } u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y} \quad \text{ב. } u_{xy} = u_{yx}$$

$$\text{חשב: ג. } u_{xy}(1, \pi) \text{ אם ידוע ש- } f'(0) = 2, g'(0) = 1.$$

$$(14) \text{ נתון } y = r \sin \theta, x = r \cos \theta, u = f(x, y)$$

$$\text{א. הוכח } (u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta)^2$$

$$\text{ב. הוכח } u_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta$$

$$\text{ג. הוכח } f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$$

$$(15) \text{ נתון } z = h(u, v) \text{ ונתון כי } u = f(x, y), v = g(x, y) \text{ מקיימות את מישוואת}$$

$$u_x = v_y, u_y = -v_x \text{ קושי-רימן, כלומר מקיימות}$$

הוכח כי:

$$\text{א. } u, v \text{ מקיימות את מישוואת לפלס. כלומר } u_{xx} + u_{yy} = 0, v_{xx} + v_{yy} = 0$$

$$\text{ב. } h_{xx} + h_{yy} = \left((u_x)^2 + (v_x)^2 \right) (h_{uu} + h_{vv})$$

$$(16) \text{ נתון } y = r \sinh s, x = r \cosh s, u = f(x, y)$$

$$\text{הוכח כי } (u_x)^2 - (u_y)^2 = (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_s)^2$$

פתרונות

$$(13) \text{ ג. } -e$$

פרק 29 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

* מומלץ בחום לעיין בנספח הוקטורים שבעמוד 71.

$$(1) \text{ תהי } f(x, y) = x^2 + y^2$$

א. חשב את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3, 4)$. מהי משמעות התוצאה?

ב. הראה שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f העובר דרך $(3, 4)$.

$$(2) \text{ תהי } f(x, y) = 3x^2y$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$ בכיוון הוקטור $\vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

$$(3) \text{ תהי } f(x, y) = x - \sin(xy)$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, \pi/2)$ בכיוון הוקטור $\vec{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

$$(4) \text{ תהי } f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$ בכיוון וקטור היחידה, היוצר

זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר x .

$$(5) \text{ תהי } f(x, y) = xy^2$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 3)$ בכיוון לנקודה $(4, 5)$.

$$(6) \text{ תהי } f(x, y, z) = x^2y^2z$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(2, 1, 4)$ בכיוון הוקטור

$$\vec{u} = 1\cdot\mathbf{i} + 2\cdot\mathbf{j} + 2\cdot\mathbf{k}$$

(7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x, y) נתון על ידי $V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, מצא

את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3, 4)$ בכיוון הנקודה $(2, 6)$.

(8) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x, y) = e^x(\cos y + \sin y)$

בנקודה $(0, 0)$ היא מקסימלית וחשב את ערכה.

(9) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x, y, z) = 2x^3y - 3y^2z$

בנקודה $(1, 2, -1)$ היא מקסימלית וחשב את ערכה.

(10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x, y, z) = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2$ ואתה נמצא

בנקודה $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליך

ללכת?

הערות סימון

א. במישור R^2 : $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$

ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים: $\vec{u} = (x, y)$ או $\vec{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

למשל, $\vec{u} = (3, 4) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

במרחב R^3 : $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v} = (x, y, z)$ או $\vec{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

למשל, $\vec{u} = (3, 4, 5) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\cdot\mathbf{i} + 4\cdot\mathbf{j} + 5\cdot\mathbf{k}$

ב. יש המסמנים וקטור גם כך \underline{u} או כך \mathbf{u} .

ג. וקטור יחידה יסומן $\hat{\mathbf{u}}$.

פתרונות

(1) א. הגרדיאנט (6,8). אורך הגרדיאנט 10.

(2) 48/5 (3) 1/2 (4) $7.5\sqrt{2}$ (5) $3\sqrt{13}$ (6) 88/3

(7) $1/5\sqrt{5}$ (8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור (1,1) ושווה ל- $\sqrt{2}$

(9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור (12,14,-12) ושווה ל-22.

(10) בכיוון הוקטור (-2,2,-2).

פרק 30 - פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות, שימושים

גיאומטריים

פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות

(1) מצא את y' כאשר $x^2 + y^5 = xy + 1$. חשב את $y'(0)$.

(2) מצא את $y'(1)$ כאשר $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$.

(3) מצא את $y'(e)$, $y''(e)$ כאשר $2\ln x + \ln y = 1$.

(4) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$.

חשב את: $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.

(5) נתון $(y = y(x, z) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$.

חשב את $y_x(0,0)$, $y_z(0,0)$.

(6) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^3 - 2xz + y = 0$. מצא $z_{xx}(1,1)$.

(7) נתונה משוואה $z^3 - 3xyz = 4$ ונקודה $(2,1,-2)$.

מצא: (1) $z_{xx}(2,1)$ (2) $z_{xy}(2,1)$ (3) $z_{yy}(2,1)$.

(8) אם $u^2 - v = 3x + y$, $u - 2v^2 = x - 2y$,

מצא את u_x, v_x, u_y, v_y .

(9) אם $w = u^3 + v^3$, $y = u^2 + v^2$, $x = u + v$, מצא את w_x, w_y .

שימושים גיאומטריים (מישור משיק וישר נורמלי למשטח)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - גיא סלומון ©

$$(10) \text{ נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה } \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3 \text{ (} z < 0 \text{)}$$

מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P בה $x = -2, y = 1$.

$$(11) \text{ מצא משוואה של מישור משיק למשטח } xyz = 8 \text{ בנקודה } (-2, 2, -2) \text{ וכן}$$

משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.

$$(12) \text{ מצא מישור המשיק למשטח } x^2 + 8y^2 = 21 - 27z^2 \text{ המקביל למישור}$$

$$x + 8y + 18z = 0$$

$$(13) \text{ למשטח } \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} \text{ מעבירים מישור המשיק בנקודה כלשהי.}$$

מישור זה חותך את הצירים x, y, z בנקודות A, B, C בהתאמה. נסמן

$$. OA + OB + OC = a \text{ הוכח. } O = (0, 0, 0)$$

(למעשה מוכיחים שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה).

פתרונות

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

$$z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad (4)$$

$$y_x(0,0) = 0, y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4} \quad (5)$$

$$z_x(1,1) = -16 \quad (6)$$

$$z_{xx}(2,1) = z_{xy}(2,1) = 1, z_{yy}(2,1) = 4 \quad (7)$$

$$u_x = \frac{1-12v}{1-8uv}, u_y = \frac{-4v-2}{1-8uv}, v_x = \frac{2u-3}{1-8uv}, v_y = \frac{-4u-1}{1-8uv} \quad (8)$$

$$w_x = -3uv, w_y = 1.5(u+v) \quad (9)$$

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad (10)$$

$$x - y + z + 6 = 0, (-2, 2, -2) + t(1, -1, 1) \quad (11)$$

$$x + 8y + 18z = 21, x + 8y + 18z = -21 \quad (12)$$

פרק 31 - נוסחת טיילור של פונקציה בשני משתנים, הדיפרנציאל

השלם

נוסחת טיילור

פתח את הפונקציות הבאות לטור טיילור עד סדר שני סביב הנקודה (a, b) :

$$(a, b) = (1, 2) \quad f(x, y) = x^2 y + 3y - 2 \quad (1)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = (1 + y) \ln(1 + x - y) \quad (2)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2} \quad (3)$$

$$(a, b) = (2, 1) \quad f(x, y) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - y}{x + y^2}} \quad (4)$$

(5) בעזרת התוצאה של תרגיל 2, חשב בקירוב את $\ln(1.5)$.

(6) בעזרת התוצאה של תרגיל 3, חשב בקירוב את e^3 .

(7) בעזרת התוצאה של תרגיל 4, חשב בקירוב את $\sqrt[3]{2}$.

הדיפרנציאל השלם

(8) מחשבים את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו.

ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על 2%,

ושהשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על 4%.

הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחושב.

(9) נתונות שתי צלעות במלבן: $a = 10_{cm}$, $b = 24_{cm}$.

חשב את השינוי המדוייק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך

אלכסון המלבן אם את הצלע a יאריכו ב- 4_{mm} ואת הצלע b יקצרו ב- 1_{mm} .

(10) מודדים את האורך של תיבה, את רוחבה ואת גובהה. השגיאה היחסית בכל

מדידה אינה עולה על 5%. הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית

באורך של אלכסון התיבה, המחושב לפי תוצאות המדידה.

(11) בעזרת הדיפרנציאל השלם, מצא בקירוב את הערך של $\sqrt[4]{15.09 + (0.99)^2}$.

פתרונות

$$f(x, y) = 6 + 4(x-1) + 4(y-2) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = x - y - \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{3}{2}y^2 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 1 + 4y - x^2 + 14y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{3}(y-1) - \frac{7}{81}(x-2)^2 + \frac{1}{9}(x-2)(y-1) \quad (4)$$

$$\frac{3}{8} \quad (5)$$

$$19 \quad (6)$$

$$\frac{101}{81} \quad (7)$$

$$8\% \quad (8)$$

(9) שינוי מדויק 0.06472, שינוי מקורב 0.06153.

5% (10)

$2\frac{7}{3200}$ (11)

פרק 32 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוקף.

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

$$(9) \text{ נתון משטח } z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$$

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$

וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

(12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.

עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8.

מנהל השיווק עומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ ואת הביקוש Q_2

למחשבון בסין על ידי:

$$Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$$

$$Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם

את הרווח? מהו רווח זה?

פתרונות

- (1) $(-0.5, 1)$ אוכף ; מינימום $(1.5, -3)$.
- (2) $(1, 2)$ מינימום ; $(-1, -2)$ מקסימום ; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוכף.
- (3) $(0, 0)$ אוכף ; $(1, 1)$ מינימום.
- (4) $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ מינימום ; $(1, 0)$ מקסימום ; $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$ אוכף.
- (5) $(0, 2)$ מקסימום . $(4, 4)$ מקסימום .
- (6) $(4, 4)$ מקסימום .
- (7) $(-0.5, 4)$ מקסימום .
- (8) אין נקודות קריטיות.
- (9) $z = 3$, $z = 4$.
- (10) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .
- (11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
- (12) $P_1=10\$$, רווח מקסימלי $288\$$.

פרק 33 - קיצון של פונקציה של שניים/שלושה משתנים (רמה

מתקדמת)

שיטת מינימום הריבועים הפחותים

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות :

$$f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

$$(z = f(x, y)) \quad z^3 + z + xy - 2x - y + 2 = 0 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x - 12y + 8 \quad (4)$$

$$(x, y, z > 0) \quad f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (5)$$

(6) מצא מרחק מינימלי בין הפרבולה $y = x^2 + 1$ לפרבולה $y = -x^2 + 2x$.
* לפתרון תרגיל זה נדרש יידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה כגון שיטת ניוטון רפסון.

שיטת הריבועים הפחותים

(7) נתונות m נקודות: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצא קו עקום מהצורה $y = h(x)$

כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי :

הדגם עבור הנקי' $(2, 2.5), (1, 0.8), (3, 3.2), (4, 3.5)$, $h(x) = ax + b$

הדגם עבור הנקי' $(-1, 2), (2, 0), (0, -2)$, $h(x) = ax^2 + bx$

הדגם עבור הנקי' $(10, 20.2), (6, 12.9), (4, 8.5), (0.5, 4)$, $h(x) = ax + \frac{b}{x}$

הדגם עבור הנקי' $(4, 33), (2, 8.5), (0.5, 2.3), (1, 4.5), (0.1, 90)$, $h(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2}$

הדגם עבור הנקי' $(1, 4.5), (0.5, 2.3), (0, 0.8), (-1, 0.1), (-0.5, 0.12)$, $h(x) = ax^2 + bx + c$

(8) נתונות n נקודות: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

מצא ישר $y = ax + b$ כך ששכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר

והנקודות יהיה מינימלי. עליך להגיע לנוסחה מפורשת עבור a ו- b .

הערה: בשאלות (7) ו-(8) ניתן להניח ש- a ו- b המתקבלים מפתרון המשוואות

נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (h(x_i) - y_i)^2$$

פתרונות

(2) מקסימום. $(0, 0)$

(4) אין קיצון. $(1, 2)$ אוקף.

(6) 0.375

$$y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x \quad (\text{ב.7})$$

$$y = 2.06x^2 + \frac{0.9}{x^2} \quad (\text{ד.7})$$

(1) לכל t ממשי, מקסימום.

(3) אין קיצון. $(1, 2)$ אוקף.

(5) מינימום. $(0.5, 1, 1)$

$$y = 0.88x + 0.3 \quad (\text{א.7})$$

$$y = 2.032x + \frac{1.5039}{x} \quad (\text{ג.7})$$

$$y = 1.48x^2 + 2.196x + 0.824 \quad (\text{ה.7})$$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (8)$$

פרק 34 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')

פונקציות של שני משתנים

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות הבאות בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 ; 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2 ; x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y ; x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y ; x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\text{Max}\{xy\} \quad \text{s.t.} \quad x + 3y = 12 \quad (5)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{Max}\{2x + y\} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \quad (6)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

(7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x + 3y = 12$, מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

(8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$ מצא את הנקודות שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

(9) מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x - 6y + 4 = 0$ לפרבולה

$$x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$$

רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $ax + by + c = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

(10) מוישלה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = \ln x + \ln y \quad (x, y)$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוישלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$ והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישלה.

(11) דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = xy \quad \text{נתונה על ידי}$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.

לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.

(12) עקומת התמורה בין מנגו X ואננס Y היא $x^2 + y^2 = 13$.

$$f(x, y) = 4x + 6y \quad \text{לדני תועלת}$$

דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) , על עקומת התמורה, המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעיה.

(13) לייצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$. המחירים ליחידת K ו- L הם

$P_K = 2, P_L = 1$. היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף

(K^*, L^*) המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).

פתרונות

- | | | | |
|---------------------|-------------------------------------|-------------------------|--|
| $Max(0, \pm 1)$ | $min(\pm 1, 0)$ | (2) $Max(\pm 1, \mp 1)$ | (1) $min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7})$ |
| $Max(\pm 2, 1)$ | $min(\pm 2, 1)$ | (4) $Max(2, 3)$ | (3) $min(-2, -3)$ |
| | $Max(9, 36)$ | (6) | (5) $Max(6, 2)$ |
| $Max(\pm 1, \mp 1)$ | $min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7})$ | (8) | (7) $(6, 2)$ |
| | $min(\sqrt{32}, \sqrt{8})$ | (10) | (9) $7/\sqrt{45}$ |
| | $Max(2, 3)$ | (12) | (11) $Max(6, 2)$ |
| | | | (13) $min\{2K + L\} ; \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100$ |

פרק 35 - קיצון תחת אילוצים של פונקציה של שלושה משתנים (כופלי

לגרנג'ו

פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוץ

(1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(2) מצא על פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1, 2, 2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1, 2, 2)$.

(3) א. מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$.
 ב. מצא נקי' על המישור $-2x - 2y + z = 0$ שהיא הקרובה ביותר לנקי' $(1, 2, 3)$.
 ג. בדוק תשובתך ע"י חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.

(4) מצא את הנקודות על המשטח $z^2 = xy + 1$ הקרובות ביותר לראשית.

(5) מצא את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$

$$3x + 4y + 12z = 288 \quad \text{למישור}$$

רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0, z_0) מהמישור $ax + by + cz + d = 0$ הוא

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוצים

(6) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2 + y^2 = 1$ והמישור $z = x + y$ לבין ראשית הצירים.

(7) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad \text{והמישור } z = x + y \quad \text{לבין ראשית הצירים.}$$

הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פסיקליים או גיאומטריים היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

פתרונות

- (1) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ .
- (2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה $(2, 4, 4)$.
- הנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה $(-2, -4, -4)$.
- (3) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3})$.
- (4) $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$.
- (5) מרחק קצר ביותר $\frac{256}{13}$. מרחק ארוך ביותר $\frac{320}{13}$.
- (6) מרחק מינימלי 1 . מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.
- (7) מרחק מינימלי $\frac{75}{17}$. מרחק מקסימלי 10 .

פרק 36 - קיצון מוחלט של פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה

(1) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7 \text{ בתחום } R, \text{ כאשר } R \text{ הוא התחום הסגור, בצורת}$$

$$\text{משולש שקודקודיו הם: } (0, 5), (3, 0), (0, 0).$$

(2) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$$f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y \text{ בתחום } R, \text{ כאשר } R \text{ הוא התחום הסגור, בצורת}$$

$$\text{ריבוע שקודקודיו הם } (2, 0), (2, 2), (0, 2), (0, 0).$$

(3) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x \text{ בתחום } R, \text{ כאשר } R \text{ הוא העיגול } x^2 + y^2 \leq 4.$$

(4) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y \text{ בתחום } R, \text{ כאשר } R \text{ הוא התחום הסגור,}$$

$$R = \{(x, y) \mid x + y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}$$

(5) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y \text{ בתחום } R, \text{ כאשר } R \text{ הוא התחום הסגור,}$$

$$R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}$$

פתרונות

(1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט -11.

(2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט -1.

(3) מקסימום מוחלט $\frac{33}{4}$. מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$.

(4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט -1.

(5) מקסימום מוחלט $1 + 6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1 - 6\sqrt{10}$.

פרק 37 - החלפת משתנים באינטגרל משולש (יקוביאן)

(1) חשב את $\iiint_G (z-y)^2 xy dV$ כאשר G הוא הגוף המוגבל על ידי המשטחים

$$xy=4, xy=2, z=y+1, z=y, x=3, x=1$$

(2) חשב את הנפח של האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(3) חשב את $\iiint_G x^2 dV$ כאשר G הוא האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(4) חשב את נפח התחום המוגבל על ידי המשטחים

$$y=4z^2, y=z^2, y=4x-12, y=4x, y=2z, y=z$$

(5) חשב את $\iiint_G \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2} dV$ כאשר G הוא הכדור שמרכזו

בנקודה $(1, 2, 4)$ ורדיוסו 1.

פתרונות

$$2 \ln 3 \quad (1)$$

$$\frac{4}{3} \pi abc \quad (2)$$

$$\frac{4}{15} \pi a^3 bc \quad (3)$$

$$\frac{105}{32} \quad (4)$$

$$\pi \quad (5)$$

פרק 38 - אינטגרלים קויים ושימושיהם (אורך ומסה של עקום, עבודה)

* מומלץ בחום לעיין בנספח "הצגות פרמטריות של עקומים חשובים" שבעמ' 70.

אינטגרל קוי מסוג I

$$(1) \text{ חשב } \int_C f(x, y) ds$$

א. $C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$; $f(x, y) = 1 - x^2$

ב. $C: x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq \pi$; $f(x, y) = x$

ג. C קטע של ישר המחבר את $O(0,0)$ עם $A(1,2)$; $f(x, y) = x + y$

ד. C היקפו של ΔOAB של $O(0,0), A(0,1), B(1,0)$; $f(x, y) = x + y^2$

$$(2) \text{ חשב } \int_C f(x, y, z) ds$$

א. $C: x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leq t \leq \pi$; $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

ב. $C: x = t, y = \frac{1}{\sqrt{2}}t^2, z = \frac{1}{3}t^3, 0 \leq t \leq 3$; $f(x, y, z) = x^3 + 3z$

(3) חשב את אורך העקום $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

(4) סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי $x = \cos t, y = \sin t, z = 2t$ ($0 \leq t \leq \pi$)

חשב את מסת הסליל אם פונקציית הצפיפות היא $\delta(x, y, z) = kz$ ($k > 0$).

אינטגרל קווי מסוג II

(5) חשב:

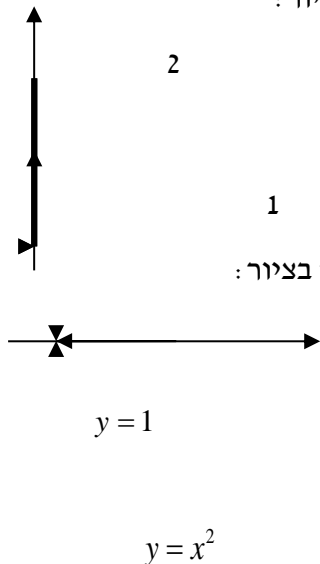
$$C: x = \cos t, y = \sin t \quad 0 \leq t \leq \pi/2; \int_C 2xy dx + (x^2 + y^2) dy \quad \text{א.}$$

$$C: x = t, y = t^2 \quad 0 \leq t \leq 1; \int_C (2x + y) dx + (x^2 - y) dy \quad \text{ב.}$$

(6) חשב $\int_C y dx + x^2 dy$ כאשר C המסלול מנקודה $(0,0)$ לנקודה $(2,4)$ ו- C נתון ע"י המשוואה: א. $y = 2x$ ב. $y = x^2$ (7) $\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x+y) dx + (y-x) dy$ אם העקום נתון על ידי:

א. הפרבולה $y^2 = x$.

ב. קו ישר.

ג. הקוים הישרים מ- $(1,1)$ ל- $(1,2)$ ומשם ל- $(4,2)$.ד. העקום: $x = 2t^2 + t + 1, y = t^2 + 1$.(8) חשב $\int_C x^2 y dx + x dy$ כאשר המסלול C מתואר בציור:(9) חשב $\int_C (x - y^2) dx + dy$ כאשר המסלול C מתואר בציור:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k} \quad \text{אם (10)}$$

חשב את האינטגרל הקווי $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ מ- $(0,0,0)$ ל- $(1,1,1)$ לאורך המסלולים:

$$\text{א. } x=t, y=t^2, z=t^3$$

ב. הקווים הישרים מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,0,1)$, משם ל- $(0,1,1)$ ומשם ל- $(1,1,1)$.

ג. הישר המחבר את $(0,0,0)$ ו- $(1,1,1)$.

(11) חשב את האינטגרל הקווי $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, כאשר:

$$F(x, y) = (x^2 y^3, -y\sqrt{x}), \quad r(t) = (t^2, -t^3), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{א.}$$

$$F(x, y, z) = (\sin x, \cos y, xz), \quad r(t) = (t^3, -t^2, t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{ב.}$$

(12) א. חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x, y) = x^3 \mathbf{i} + (x - y) \mathbf{j}$

על חלקיק שנע על הפרבולה $y = x^2$ מ- $(-2, 4)$ עד $(1, 1)$.

ב. כיצד הייתה משתנה תשובתך אילו החלקיק היה נע מ- $(1, 1)$ עד $(-2, 4)$.

(13) חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$

על חלקיק הנע לאורך העיקול $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$ ($0 \leq t \leq 1$).

הערת סימון

אינטגרל קווי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (f, g, h) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C f dx + g dy + h dz$$

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (A_1, A_2, A_3) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

פתרונות

$$\frac{5}{6}(\sqrt{2}+1) \quad \text{ד.} \quad \frac{3\sqrt{5}}{2} \quad \text{ג.} \quad \frac{16}{3} \quad \text{ב.} \quad \pi \quad \text{א. (1)}$$

$$\frac{567}{2} \quad \text{ב.} \quad \sqrt{2}\pi\left(1+\frac{\pi^2}{3}\right) \quad \text{א. (2)}$$

$$6 \quad (3)$$

$$\sqrt{5}k\pi^2 \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad \text{ב.} \quad \frac{1}{3} \quad \text{א. (5)}$$

$$\frac{32}{3} \quad \text{ב.} \quad \frac{28}{3} \quad \text{א. (6)}$$

$$\frac{32}{3} \quad \text{ד.} \quad 14 \quad \text{ג.} \quad 11 \quad \text{ב.} \quad \frac{34}{3} \quad \text{א. (7)}$$

$$\frac{1}{2} \quad (8)$$

$$\frac{4}{5} \quad (9)$$

$$\frac{6}{5} \quad \text{ג.} \quad -3 \quad \text{ב.} \quad 2 \quad \text{א. (10)}$$

$$\frac{6}{5} - \sin 1 - \cos 1 \quad \text{ב.} \quad -\frac{59}{105} \quad \text{א. (11)}$$

$$-3 \quad \text{ב.} \quad 3 \quad \text{א. (12)}$$

$$1 \quad (13)$$

פרק 39 - אי תלות במסלול, שדות משמרים

(1) קבע האם \mathbf{F} הוא שדה משמר. אם כן, מצא פונקציה ϕ כך ש- $\nabla\phi = \mathbf{F}$.

א. $\mathbf{F}(x, y) = (6x + 5y, 5x + 4y)$

ב. $\mathbf{F}(x, y) = xe^y \mathbf{i} + ye^x \mathbf{j}$

ג. $\mathbf{F}(x, y) = (2x \cos y - y \cos x, -x^2 \sin y - \sin x)$

ד. $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2 \mathbf{i} + e^{-y} \mathbf{j} + 2xz \mathbf{k}$

ה. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + (xy + 3z^2) \mathbf{k}$

ו. $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, 2yz, y^2)$

(2) נתון האינטגרל $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy$

א. הוכח שהאינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את $(1, 2)$ ו- $(3, 4)$.

ב. חשב את האינטגרל בשתי דרכים שונות.

(3) חשב את האינטגרל $\int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3 dx + (1 + 3x^2y^2)dy$

(4) חשב את האינטגרל $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy$

(5) יהי $\mathbf{F}(x, y) = e^y \mathbf{i} + xe^y \mathbf{j}$. מצא את העבודה שמבצע השדה על חלקיק הנע

על $y = \sqrt{1-x^2}$ מ- $(1, 0)$ ל- $(-1, 0)$.

(6) חשב את האינטגרל $\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)} (2xz^3 + 6y)dx + (6x - 2yz)dy + (3x^2z^2 - y^2)dz$

תן מובן פיסיקאלי לתוצאה.

(7) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F} = \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{j}$ ונתונים 3 מסלולים :

$$L_1: x^2 + y^2 = 1 \quad \text{בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).}$$

$$L_2: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{בכיוון השלילי (עם כיוון השעון).}$$

$$L_3: (x-10)^2 + (y-7)^2 = 1 \quad \text{בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).}$$

$$\int_{L_3} \mathbf{F} dr \quad \int_{L_2} \mathbf{F} dr \quad \int_{L_1} \mathbf{F} dr$$

חשב: א. ב. ג.

(8) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{j}$

ונתונים 2 מסלולים מ- $(2, 0)$ ל- $(-2, 0)$:

$$L_1: x^2 + y^2 = 4, y \geq 0 \quad L_2: x^2 + y^2 = 4, y \leq 0$$

$$\int_{L_2} \mathbf{F} dr, \int_{L_1} \mathbf{F} dr$$

א. חשב:

ב. הוכח כי \mathbf{F} משמר בחצי הטבעת $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$.

הערת סימון

שדה וקטורי בסימונים שונים בספרות המקצועית :

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\hat{x} + g(x, y, z)\hat{y} + h(x, y, z)\hat{z}$$

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$$

פתרונות

א. (1) $\phi(x, y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2$. ב. השדה אינו משמר.

ג. $\phi(x, y) = x^2 \cos y - y \sin x$. ד. $\phi(x, y, z) = xz^2 - e^{-y}$.

ה. $\phi(x, y, z) = xyz + z^3$. ו. השדה אינו משמר.

(2) ב. 236

(3) -58

(4) 5

(5) -2

(6) = 15 עבודה שנעשית בהזזת גוף מ- (1,-1,1) ל- (2,1,-1) לאורך C .

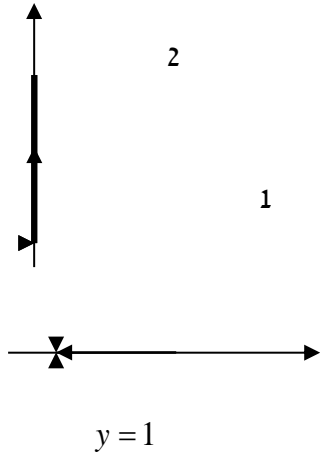
(7) א. 2π . ב. -2π . ג. 0 .

(8) א. $L_1 : \pi$, $L_2 : -\pi$.

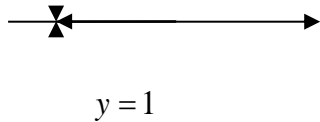
פרק 40 - משפט גרין

בכל אחד מהתרגילים (1)-(3) אשר את משפט גרין, כלומר חשב את האינטגרל $\oint_C f dx + g dy$ ואת האינטגרל $\iint_R (g_x - f_y) dA$ והראה שהם שווים זה לזה.

(1) $\oint_C x^2 y dx + x dy$; המסלול C מתואר בציור:



(2) $\oint_C (x - y^2) dx + dy$; המסלול C מתואר בציור:



(3) $\oint_C (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy$

C הוא ריבוע שקודקודיו: $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$ בכיוון החיובי. ריקי

(4) חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x, y) = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (\cos y + x^3)\mathbf{j}$ על חלקיק הנע על מעגל היחידה $x^2 + y^2 = 1$, בכיוון הפוך לכיוון השעון

ומשלים הקפה אחת.

(5) חשב את האינטגרל $\int_C \left(e^y - \tan \frac{x}{2} \right) dx + (x e^y + y \cos y^2) dy$ כאשר C הוא

האיחוד של העקומים $y = 8 - x^2$, $y = x^2$ ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

$$(6) \text{ חשב את האינטגרל } \int_C -2e^{2x-y} \cos y dx + (e^{2x-y} (\sin y + \cos y) + 2xy) dy$$

כאשר C הוא חצי האליפסה $\{x^2 + 4y^2 = 4, y \geq 0\}$ מהנקודה $(2, 0)$ לנקודה

$$(-2, 0)$$

$$(7) \text{ א. הוכח שהשטח החסום על ידי עקום סגור פשוט } C \text{ נתון ע"י: } \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx$$

$$\text{ב. חשב את שטח האליפסה } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

פתרונות

(1) הערך המשותף הוא 0.5

(2) הערך המשותף הוא 0.8

(3) הערך המשותף הוא 8

$$1.5\pi \quad (4)$$

$$0.5 \sin 64 \quad (5)$$

$$\frac{8}{3} + e^4 - \frac{1}{e^4} \quad (6)$$

$$\pi ab \quad \text{ב. (7)}$$

פרק 41 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם

אינטגרל משטחי מסוג I

בכל אחד מהתרגילים (1)-(5) חשב את האינטגרל המשטחי:

$$(1) \iint_S x^2 y z dS \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = 1 + 2x + 3y \text{ מעל המלבן } R = [0, 3] \times [0, 2]$$

$$(2) \iint_S x dS \text{ כאשר } S \text{ הוא המשטח } y = x^2 + 4z, \text{ } 0 \leq x \leq 2, \text{ } 0 \leq z \leq 2$$

$$(3) \iint_S y z dS \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = y + 3 \text{ שכלוא בתוך הגליל } x^2 + y^2 = 1$$

$$(4) \iint_S (x^2 z + y^2 z) dS \text{ כאשר } S \text{ הוא חצי הכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 4, \text{ } z \geq 0$$

$$(5) \iint_S xyz dS \text{ כאשר } S \text{ הוא חלק החרוט } \mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + 3u \mathbf{k}$$

$$\text{המקיים } 1 \leq u \leq 2, \text{ } 0 \leq v \leq \pi / 2$$

(6) חשב את שטח הפנים של כדור בעל רדיוס R .

(7) היריעה הדקה S היא חלק הפרבולואיד $z = x^2 + y^2$ שמתחת למישור $z = 1$

וצפיפותה $\delta(x, y, z) = \delta_0$ קבועה. חשב את מסת היריעה.

אינטגרל משטחי מסוג II

בכל אחד מהתרגילים (8)-(12) חשב את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$

ובניסוח אחר :

בכל אחד מהתרגילים (8)-(12) חשב את השטף של שדה הזרימה \mathbf{F} דרך S .
(\mathbf{n} הוא נורמל חיצוני של S).

(8) $\mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה הנקבעת ע"י המישורים : $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

(9) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(10) $\mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה הנקבעת ע"י המישורים : $2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0$.

(11) $\mathbf{F} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$ שבו $z \geq 0$.

$$\mathbf{F} = 0\mathbf{i} - 2z\mathbf{j} + (-3y - 1)\mathbf{k} \quad (12)$$

S הוא חצי הכדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy .

פתרונות

$$\pi\sqrt{2}/4 \quad (3) \qquad \frac{33\sqrt{33} - 17\sqrt{17}}{6} \quad (2) \qquad 171\sqrt{14} \quad (1)$$

$$4\pi R^2 \quad (6) \qquad 93/\sqrt{10} \quad (5) \qquad 16\pi \quad (4)$$

$$\frac{8\pi}{3} \quad (9) \qquad \frac{11}{6} \quad (8) \qquad \frac{\pi\delta_0}{6}(5\sqrt{5} - 1) \quad (7)$$

$$-16\pi \quad (12) \qquad 12\pi \quad (11) \qquad 27 \quad (10)$$

פרק 42 - משפט הדיברגנץ (גאוס)

בכל אחד מהתרגילים (1)-(3) אשר את משפט הדיברגנץ, כלומר חשב את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ ואת האינטגרל $\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} dV$ והראה שהם שווים זה לזה. \mathbf{n} הוא נורמל חיצוני של S . (ראה הערת סימון בסוף הסעיף).

(1) $\mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2 y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה G הנקבעת ע"י המישורים: $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

(2) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור G , $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(3) $\mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה G הנקבעת ע"י המישורים: $2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0$.

(4) יהי S פני הגוף הכלוא בגליל $x^2 + y^2 = 9$ בין המישורים $z=0$ ו- $z=2$. חשב את השטף של השדה הוקטורי $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ דרך S . כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ כאשר \mathbf{n} הוא נורמל חיצוני של S .

(5) חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ כאשר \mathbf{n} הוא נורמל חיצוני של S .

$\mathbf{F} = (z^2 - x)\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הגוף החסום על ידי:

$$x=0, x=3, z=4-y^2, z=0$$

(6) חשב את $\iint_S xz^2 dydz + (x^2 y - z^3)xydzdx + (2xy + y^2 z)dxdy$

כאשר S הוא פני הגוף החסום על ידי: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, z = 0$.

(7) יהי S משטח פתוח $x^2 + z^2 = 16$, $0 \leq y \leq 4$, (גליל ללא הבסיסים).

חשב את השטף דרך S של השדה הוקטורי $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + 5y\mathbf{j} + x^5\mathbf{k}$.

כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ כאשר \mathbf{n} הוא נורמל חיצוני של S .

(8) חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ כאשר \mathbf{n} הוא נורמל חיצוני של S .

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x^2 y}{1+y^2} + 6yz^2 \right) \mathbf{i} + 2x \arctan y \mathbf{j} - \frac{2xz(1+y) + 1+y^2}{1+y^2} \mathbf{k}$$

S הוא חלק הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$ שבו $z \geq 0$ (המשטח פתוח).

הערת סימון

לפי משפט הדיברגנץ, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$

$$\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

מתקיים

ניסוחים נוספים של משפט הדיברגנץ:

$$\iiint_G \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\iiint_G (f_x + g_y + h_z) dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\iiint_G (f_x + g_y + h_z) dV = \iint_S f dydz + g dzdx + h dx dy$$

פתרונות

(1) הערך המשותף הוא $\frac{11}{6}$

(2) הערך המשותף הוא $\frac{8}{3}\pi$

(3) הערך המשותף הוא 27

(4) 279π

(5) 16

(6) $\frac{2\pi a^5}{5}$

(7) 0

(8) -4π